★★★

| Épreuve de Maths<br>Filières : SMA - SMB<br>Coefficient : 9<br>Durée : 4 heures | Royaume du Maroc<br>Ministère de l'Education Nationale<br>De la Formation professionnelle<br>de l'Eseignement supérieur<br>& de la Recherche scientifique | Examen National du<br>BACCALAURÉAT<br>Session Rattrapage<br>Juillet 2007 |
|---|---|---|

## ■ Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

On considère le système suivant :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases} \quad ; \quad a,b,p,q \in \mathbb{Z} \quad ; \quad p \wedge q = 1$$

0,50 **1 a** Montrer que : $\exists\,(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ pu_0 + qv_0 = 1$ .

0,50 **b** Montrer que : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système $(S)$ .

0,50 **2** Montrer que : $x \ \ est \ \ solution \ \ de \ (S) \ \Longrightarrow \ pq \ divise \ (x - x_0)$

0,50 **3** Montrer que : $pq \ divise \ (x - x_0) \ \Longrightarrow \ x \ \ est \ \ solution \ \ de \ (S)$

0,50 **4** Résoudre ainsi le système $(S)$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ .

0,50 **5** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 3\ [13] \end{cases}$

## ■ Exercice Numéro 2 : (02,00 points)

Soit n un entier naturel impair non nul et supérieur ou égal à 3, On dispose de n urnes numérotés de 1 jusqu'à n. l'urne numéro k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires $(1 \leq k \leq n)$. On choisit au hasard une urne puis on tire au hasard une boule.

0,50 **1** Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

0,75 **2** Calculer la probabilité d'effectuer le tirage d'une urne impaire.

0,75 **3** Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que le tirage est effectué d'une urne impaire.

## ■ Exercice Numéro 3 : (02,75 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit : $(H) = \{ \ M(z) \in \mathcal{P} \ \ ; \ \ z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \ \}$

0,50 **1 a** Montrer que $(H)$ est une hyperbole puis donner ses caractéristiques.

0,25 **b** Construire l'hyperbole $(H)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

**2** Soit : $\varphi(a,b) = a\,\bar{b} + \bar{a}\,b - \overline{ab} \quad ; \quad avec \quad M(a) \ ; M(b) \in (H)$

0,50 **a** Montrer que : $M\big(\varphi(a,b)\big) \in (H)$ .

0,50 **b** Vérifier que : $\varphi(a,1) = 1 \quad et \quad \varphi(a,\bar{a}) = 1$ .

**3** On munit $(H)$ de la loi de composition interne définie ainsi :

$$\forall \ M(a)\,, M(b) \in (H) \quad ; \quad M(a) * M(b) = M\big(\varphi(a,b)\big)$$

1,00 Montrer que $(H,*)$ est un groupe commutatif.

## ■ Exercice Numéro 4 : (03,00 points)

**Rappel** : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$ ; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un espace vectoriel.

Soit : $F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} \;;\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ; $J = M(0,1)$

0,50 **1** **a** Montrer que $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

0,50 **b** Montrer que $(I,J)$ est une base de l'espace vectoriel $(F,+,\cdot)$ .

0,50 **2** Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ , Montrer que $(1,\alpha)$ est une base de l'espace $(\mathbb{C},+,\cdot)$

**3** Soient $m,n \in \mathbb{R}$ et $\psi$ l'application définie ainsi :

$$\psi \; : \; (\mathbb{C},\times) \mapsto (F,\times)$$
$$m+\alpha n \mapsto M(m,n)$$

0,50 **a** Vérifier que : $J^2 = -2(I+J)$ $et$ $\psi(\alpha) = J$ .

0,50 **b** Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $\psi$ soit un isomorphisme.

0,50 **4** Soit $\alpha = -1+i$ , Écrire $J^{2007}$ dans la base $(I,J)$ .

## ■ Exercice Numéro 5 : (09,25 points)

**I** Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$.

0,50 **1** **a** Étudier la monotonie de la fonction $g$ .

0,50 **b** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ $et$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Puis Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.

0,50 **c** En déduire que $x_0 = 0$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$.

**2** Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,50 **a** Calculer : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,25 **b** Calculer : $f'(x)$ ; $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ .

0,50 **c** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ .

0,50 **d** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .

0,50 **3** **a** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ; $\exists!\; x_n > 0$ : $f(x_n) = 0$ .

0,50 **b** Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis montrer qu'elle converge.

0,50 **c** Montrer que : $\lim\limits_{n\infty}(x_n) = 0$

0,25 **II 1 a** Montrer l'équivalence suivante : $f(x) = 1 \iff e^{-x} = x$ .

0,50 **b** Montrer que : $\exists!\ \alpha \in \left]\frac{1}{e};1\right[ \quad ; \quad e^{-\alpha} = \alpha$

**2** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} y_{n+1} = e^{-y_n} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ y_1 = 1 \end{cases}$

0,50 **a** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad ; \quad \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 **b** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad ; \quad |y_{n+1} - \alpha| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$ .

0,50 **c** En déduire que $(y_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer sa limite.

**III** Soit $F$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt \quad ; \quad \forall\, x > 0 \\ F(0) = \dfrac{\ln 2}{2} \end{cases}$$

0,25 **1 a** Montrer que : $\forall\, t > 0 \quad ; \quad \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 **2 a** Montrer que : $\forall\, t \geq 0 \quad ; \quad 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,25 **b** Montrer que : $\forall\, t \in\, ]0,4[ \quad ; \quad \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0,25 **c** En déduire que la fonction $F$ est continue à droite en zéro.

0,25 **3 a** Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $F'(x)$ ; $\forall\, x > 0$ .

0,25 **b** Étudier la monotonie de la fonction $F$ sur $[0,+\infty[$ .